

三站时差定位的精度分析与推算模型

陈永光¹, 李昌锦², 李修和²

(11 六三八八零部队, 河南洛阳 471003; 21 电子工程学院, 安徽合肥 230037)

摘要: 从三站对辐射源联合时差定位的原理入手, 总结出基于时差误差与站址误差分离的定位精度模型, 估计了目标高度引起的平面位置定位误差范围, 通过计算机仿真得出了关于定位误差分布和布站选择的有益结论, 最后给出了定位精度推算模型。

关键词: 无源定位; 时差; 推算

中图分类号: TN953 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2004) 09-1452-04

A Precision Analyzing & Reckoning Model in Tr2Station TDOA Location

CHEN Yongguang¹, LI Changjin², LI Xiuzhe²

(11 Unit 63880, Luoyang, Henan 471003, China; 21 Electronic Engineering Institute, Hefei, Anhui 230037, China)

Abstract: We have investigated a location precision model based on the separated error of TDOA from that of station site by analyzing the principle of tr2station united TDOA location towards emitters. The scale of 2D location error caused by target height is estimated as well. With the help of computer simulation, we have made some useful conclusions about the distribution of location error and station deployment. Then a location precision reckoning model is proposed.

Key words: passive location; time difference of arrival; reckon

1 引言

时差(TDOA, Time Difference of Arrival)定位又称为双曲线定位, 是一种重要的无源定位方法, 它通过处理三个或三个以上测量站采集的信号到达时间来对辐射源定位^[1]. 在二维平面中, 辐射源信号到达两个测量站的时间差确定了一对以两站为焦点的双曲线. 如果利用三站可形成两对双曲线来产生交点, 再利用测向信息排除虚假点, 就能把辐射源的位置确定下来. 在三维空间中, 辐射源信号到达两测量站的时间差规定了一对以两站为焦点的双曲面, 若要确定三维空间的任一辐射源, 则至少需要四个站形成三个单边双曲面来产生交点, 以确定辐射源的位置.

使用时差定位方法, 当存在测量噪声时, 将存在定位误差. 为减小定位误差的影响, 可以使用最大似然估计、最小二乘估计等方法, 将使定位误差达到最小; 也可以使用直接计算法、球面相交法、球面求补法、平面相交法等进行定位^[2].

二维平面中, 虽然利用三个测量站可以形成两对双曲线来产生目标的定位交点, 但是由于受客观条件的限制, 一般只能得出一定布站条件下空中目标在有限航路上的定位精度结果, 要想全面掌握无源定位系统的定位精度, 必须全面了解无源时差定位原理与定位精度分析方法, 并得出合理的定位精度推算模型.

2 无源时差定位原理与定位精度分析

2.1 无源 TDOA 定位原理

若测量站的布局如图 1 所示, 通过单向测量信号到达时间, 可以得到如下一组单程到达时间(TOA)与距离 r_i ($i=1, 2, \dots, N$) 的关系方程组, 即

$$t_i = T_0 + \frac{r_i}{c}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

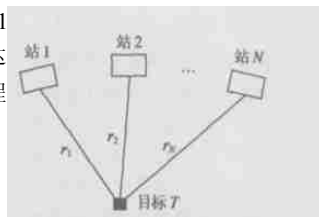


图1 测量站分布

(1)

式中, t_i 为信号由目标到达测量站的时间; T_0 为信号发射的时间; r_i 为目标与第 i 个测量站之间的距离; c 为信号传播速度(光速).

通过解算式(1)的联立方程组, 可以对辐射源定位.

2.2 基于时差误差与站址误差分离的定位精度分析

时差定位是在已知各测量站位置坐标的前提下, 利用各测量站得到的时间差, 以测量站为基准来确定目标的位置. 所以, 如果测量站位置本身存在误差, 必然导致目标位置产生误差, 从而影响定位精度. 文献[3]说明了时差无源定位中测量站站址坐标误差和时间测量误差对目标定位误差的影响, 提出了一种较好的误差分离研究思路. 这里为了强调基于时差

误差与站址误差分离的定位精度分析方法的合理性, 具体推导如下.

根据前面的原理分析, 可知测得的时间差是目标位置向量 x 和测量站站址 x_i 的函数, 基本测量方程为

$$c\delta t_i = c(t_i - t_1) = f_i(x, y, x_i, y_i, x_1, y_1) \\ = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} - \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}, \quad i = 2, 3 \quad (2)$$

对式(2)求微分, 可得

$$c\delta t_i = \frac{\partial f_i}{\partial x} dx + \frac{\partial f_i}{\partial y} dy + \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f_i}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial f_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_i}{\partial y_1} dy_1 \\ = (\cos B_{0i} - \cos B_{01}) dx + (\sin B_{0i} - \sin B_{01}) dy \\ - \cos B_{0i} dx_i - \sin B_{0i} dy_i + \cos B_{01} dx_1 + \sin B_{01} dy_1, \quad i = 2, 3 \quad (3)$$

即

$$\begin{cases} c\delta t_2 = (\cos B_{02} - \cos B_{01}) dx + (\sin B_{02} - \sin B_{01}) dy \\ - \cos B_{02} dx_2 - \sin B_{02} dy_2 + \cos B_{01} dx_1 + \sin B_{01} dy_1 \\ c\delta t_3 = (\cos B_{03} - \cos B_{01}) dx + (\sin B_{03} - \sin B_{01}) dy \\ - \cos B_{03} dx_3 - \sin B_{03} dy_3 + \cos B_{01} dx_1 + \sin B_{01} dy_1 \end{cases} \quad (4)$$

式中, B_{0i} 是目标对应各站的水平夹角.

从这里也进一步看出目标位置误差 $Dx = [dx, dy]^T$ 与时间差误差和站址误差 $Dx_i = [dx_i, dy_i]^T$ 有关.

令 $D\delta t = [D\delta t_2, D\delta t_3]^T$,

$$B = \begin{bmatrix} \cos B_{02} - \cos B_{01} & \sin B_{02} - \sin B_{01} \\ \cos B_{03} - \cos B_{01} & \sin B_{03} - \sin B_{01} \end{bmatrix}$$

可得式(4)的矩阵表达式

$$c\delta t = B dx + Dx_{s1} - Dx_{s23} \quad (5)$$

式中,

$$Dx_{s1} = \begin{bmatrix} \cos B_{01} dx_1 + \sin B_{01} dy_1 \\ \cos B_{01} dx_1 + \sin B_{01} dy_1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$Dx_{s23} = \begin{bmatrix} \cos B_{02} dx_2 + \sin B_{02} dy_2 \\ \cos B_{03} dx_3 + \sin B_{03} dy_3 \end{bmatrix} \quad (7)$$

将式(5)重写为

$$B dx = c\delta t - Dx_{s1} + Dx_{s23} \quad (8)$$

$$dx = B^{-1} (c\delta t - Dx_{s1} + Dx_{s23}) \quad (9)$$

由于各测量站的时间测量是相互独立的, 测量误差之间互不相关, 又假定时间测量误差经过系统误差修正后是零均值的, 站址误差各个分量 dx_i, dy_i 之间以及各站址误差之间互不相关. 且 $E[(\delta t_i)^2] = R_t^2, E[(\delta x_i)^2] = E[(\delta y_i)^2] = R_s^2, i = 1, 2, 3$. 因此可以将目标定位误差的协方差表示为

$$P_{Sx} = E [dx dx^T] \\ = E [B^{-1} (c\delta t - Dx_{s1} + Dx_{s23}) (c\delta t - Dx_{s1} + Dx_{s23})^T B^{-T}] \\ = B^{-1} E (c^2 \delta t \delta t^T + Dx_{s1} Dx_{s1}^T + Dx_{s23} Dx_{s23}^T) B^{-T} \\ = \begin{bmatrix} R_x^2 & Q_y R_x R_y \\ Q_y R_x R_y & R_y^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{cases} R_x^2 = \frac{[(\sin B_{02} - \sin B_{01})^2 + (\sin B_{03} - \sin B_{01})^2 + (\sin B_{02} - \sin B_{03})^2] \# (c^2 R_t^2 + R_s^2)}{[(\cos B_{02} - \cos B_{01})(\sin B_{03} - \sin B_{01}) - (\cos B_{03} - \cos B_{01})(\sin B_{02} - \sin B_{01})]^2} \\ R_y^2 = \frac{[(\cos B_{03} - \cos B_{01})^2 + (\cos B_{02} - \cos B_{01})^2 + (\cos B_{03} - \cos B_{02})^2] \# (c^2 R_t^2 + R_s^2)}{[(\cos B_{02} - \cos B_{01})(\sin B_{03} - \sin B_{01}) - (\cos B_{03} - \cos B_{01})(\sin B_{02} - \sin B_{01})]^2} \end{cases} \quad (11)$$

式(11)中含有 R_t^2, R_s^2 的项分别表明了时间测量误差、测量站站址误差对定位误差的影响, 而 B_{0i} 表明目标定位误差与目标空间位置和各测量站站址的相对几何关系有关.

二维平面上定位精度的几何稀释(GDOP)定义为^[4]

$$GDOP = \sqrt{R_t^2 + R_s^2} \\ = \frac{c \sqrt{6 - 2\cos(B_{02} - B_{01}) - 2\cos(B_{01} - B_{03}) - 2\cos(B_{03} - B_{02})}}{\sin(B_{02} - B_{01}) + \sin(B_{01} - B_{03}) + \sin(B_{03} - B_{02})} \\ \# \sqrt{R_t^2 + \frac{R_s^2}{c^2}} = GM \quad (12)$$

其中,

$$\begin{cases} G = \frac{c \sqrt{6 - 2\cos(B_{02} - B_{01}) - 2\cos(B_{01} - B_{03}) - 2\cos(B_{03} - B_{02})}}{\sin(B_{02} - B_{01}) + \sin(B_{01} - B_{03}) + \sin(B_{03} - B_{02})} \\ M = \sqrt{R_t^2 + \frac{R_s^2}{c^2}} \end{cases} \quad (13)$$

上式说明, 定位误差的大小与两个因素有关, 一是测量因子 M , 它反映了系统测量精度的影响, 包括到达时间差的测量和测量平台自身的定位测量; 另一个是几何因子, 它反映了目标和接收机之间的相对几何位置关系的影响.

当三个接收机成等边三角形分布, 目标处于三角形的几何中心时, GDOP 存在最小值^[3].

$$GDOP_{min} = \frac{2\sqrt{3}c}{3} \sqrt{R_t^2 + \frac{R_s^2}{c^2}} \quad (14)$$

上式称作时差定位的 GDOP 下限.

二维分布情况下, 一般用定位的圆概率误差 CEP (Circular Error Probable) 表示定位精度, 有多种经验公式和估算公式, 这里采用的是 CEP 与 GDOP 的关系估算式^[4].

$$CEP = 0.175 @GDOP \quad (15)$$

显然, 时差定位精度的下限为

$$CEP_{min} = 0.01866c \sqrt{R_t^2 + \frac{R_s^2}{c^2}} \quad (16)$$

2.1.3 目标高度引起的平面位置定位误差分析

对空中机动目标用三站时差定位只能获得二维量, 该二维量确定的平面为定位平面 $XcO\mathcal{Y}$, 它与水平面 XOY 各轴的关系是: Xc 轴与 X 轴成夹角 E_x , \mathcal{Y} 轴与 Y 轴成夹角 E_y , 而 $XcO\mathcal{Y}$ 平面上目标距离向量 R 与其在水平面 XOY 上投影之间夹角为 E .

三维 XYZ 坐标系上目标位置 $T(x, y, z)$ 与定位平面 $XcO\mathcal{Y}$ 上获得的定位结果 $T(xc, yc)$ 存在以下关系:

$$\begin{cases} xc = R \cos E_x \\ yc = R \sin E_y \\ z = R \sin E \end{cases} \quad (17)$$

式中, R 为目标与主站的距离.

根据二维定位的定义, 定位平面上获取的目标距离与目标斜距相等, 有

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{xc^2 + yc^2} = R \\ \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(xc \cos E_x)^2 + (yc \cos E_y)^2} = R \cos E \end{cases} \quad (18)$$

当目标高度一定时, E_x, E_y 的取值不定, 而 E 为

$$E = \arcsin \frac{z}{R} \quad (19)$$

二维定位值 x_c, y_c 和真值 x, y 之间的差值为

$$\begin{cases} \Delta x = x_c - x = x_c(1 - \cos E_x) \\ \Delta y = y_c - y = y_c(1 - \cos E_y) \end{cases} \quad (20)$$

由于 E_x, E_y 的取值不定, 使得目标高度引起的平面位置定位误差也难以确定, 因此, 只能对该项误差的范围作出估计.

$$\begin{aligned} GDOP_H &= \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{x_c^2(1 - \cos E_x)^2 + y_c^2(1 - \cos E_y)^2} \\ &= \sqrt{R^2 + R^2 \cos^2 E - 2(x_c^2 \cos E_x + y_c^2 \cos E_y)} \end{aligned} \quad (21)$$

在 $[-90^\circ, 90^\circ]$ 的 E_x, E_y 取值范围内, 有

$$GDOP_H F \sqrt{R^2 + R^2 \cos^2 E - 2(x_c^2 \cos^2 E_x + y_c^2 \cos^2 E_y)} = z \quad (22)$$

即 $GDOP_H$ 不超过目标高度 z .

求 $GDOP_H$ 最小值的过程如下:

$$GDOP_H = \sqrt{R^2 + R^2 \cos^2 E - 2(x_c^2 \cos E_x + y_c \sqrt{R^2 \cos^2 E - x_c^2 \cos^2 E_x})} \quad (23)$$

注意到在 $GDOP_H$ 的定义式(21)中, $x_c^2 \cos E_x + y_c^2 \cos E_y \geq 0$, 所以, 对 $GDOP_H$ 求解极小值等同于对下式求解极大值,

$$f(u) = x_c^2 u + y_c \sqrt{R^2 \cos^2 E - x_c^2 u^2} \quad (24)$$

其中, $u = \cos E_x$.

$$\text{令, } \frac{df(u)}{du} = x_c^2 - \frac{y_c x_c^2 u}{\sqrt{R^2 \cos^2 E - x_c^2 u^2}} = 0, \text{ 得 } u = \cos E.$$

$$\text{因为 } \begin{cases} \frac{df(u)}{du} > x_c^2(1 - \frac{y_c u}{\sqrt{R^2 \cos^2 E - x_c^2 u^2}}) \\ = x_c^2(1 - \frac{u}{\cos E}) > 0, u < \cos E \\ \frac{df(u)}{du} < x_c^2(1 - \frac{y_c u}{\sqrt{R^2 \cos^2 E - x_c^2 u^2}}) \\ = x_c^2(1 - \frac{u}{\cos E}) < 0, u > \cos E \end{cases}$$

所以 $u = \cos E$ 时, $f(u)$ 取得极大值, 也即 $GDOP_H$ 取得极小值.

$GDOP_H$ 最小误差为 $R(1 - \cos E) = R - \sqrt{R^2 - z^2}$, 发生在 $E_x = E_y = E$ 时.

这样, $GDOP_H$ 的范围是

$$R - \sqrt{R^2 - z^2} \leq GDOP_H F z \quad (25)$$

$$CEP_H = 0.175 @ GDOP_H \quad (26)$$

3 定位误差分布仿真试验与定位精度推算

3.1 相对定位误差

无源时差定位的总误差应为式(15)定义的 CEP 与式(26)定义的 CEP_H 之和, 实际使用中, 可以使用相对定位误差来描述定位的优劣. 相对定位误差描述为

$$\Gamma_{CEP} = \frac{CEP + CEP_H}{R} @ 100\% \quad (27)$$

它说明了定位误差相对于目标与主站距离的比率.

3.1.2 定位误差分布仿真试验

3.1.2.1 仿真试验

仿真试验中主站与两个副站之间呈近似

直线部署. 其中以主站位置为绝对平面坐标系的原点, 副站一、二与主站各相距约 30 km, 两副站相对主站连线形成的夹角约 150° .

图 2 是用 MATLAB 绘制的定位误差分布等值线图, 反映了主站周围 200km 内的定位误差分布情况, 其中 $/ * 0$ 是测量站位置. 定义主站与两个副站连线为基线方向(理想情况下应为 180° 直线, 此处为模拟实际布站情况而为近似直线, 有 15° 的夹角), 经过主站且垂直于基线的方向为法线方向. 取 $R_1 = 15\text{ns}$, $R_2 = 3\text{m}$, 目标高度 $z = 3300\text{m}$.

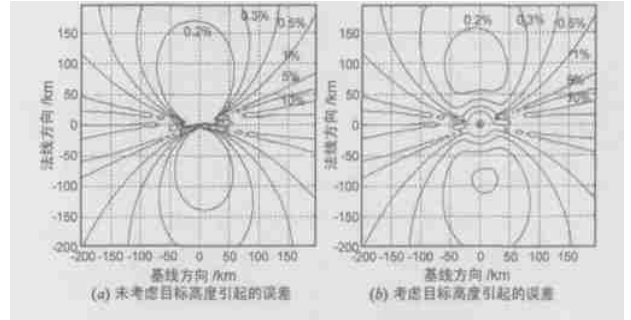


图 2 三站平面时差定位相对定位误差分布

3.1.2.2 仿真结果分析 等值线图的结果和前面的分析是一致的, 即存在以下规律:

(1) 比较图 2(a)、2(b) 可以发现, 目标高度对定位误差的影响在近区比较明显, 随着距离的增大而逐渐减弱;

(2) 按照式(12), 当 B_{01}, B_{02}, B_{03} 中任意两个彼此相等, 即当目标位于两个测量站的基线及其延长线上时, 定位误差无穷大, 仿真试验的结果证明了这一点, 即当目标处于任意两站连线的延长线附近时, 定位误差开始明显增大. 所以, 为了避免目标出现在基线及其延长线上的情况, 三个测量站应该尽量部署在同一直线上;

(3) 最佳定位区域在靠近法线方向两侧, 如以 1% 相对定位误差为界, 则此次仿真试验中的最佳定位区域在法线方向 $\pm 60^\circ$ 范围内.

3.1.3 定位精度推算模型

实测试验中将机载 GPS 定位系统或者精密测量雷达得到的目标位置作为定位真实值, 它与三站时差定位设备计算得出的目标定位值之差即为定位设备的定位误差, 可据此得出定位设备的测量精度. 设试验得出的系统对空中任一点 $T_i(x_i, y_i)$ 处目标的相对定位误差为 $\Gamma_{cp}^i = 0.175 \sqrt{R_{0i}^2 + R_{0i}^2} / R_i$, 并假设目标高度引起的定位误差取得最小值, 则有

$$\begin{aligned} \Gamma_{cp}^i &= 0.175 \# [1 - \sqrt{1 - (\frac{z_i}{R_i})^2} \\ &+ \frac{c}{R_i} \frac{\sqrt{6 - 2\cos(B_{02} - B_{01}) - 2\cos(B_{01} - B_{03}) - 2\cos(B_{03} - B_{02})}}{\sin(B_{02} - B_{01}) + \sin(B_{01} - B_{03}) + \sin(B_{03} - B_{02})} \\ &\# \sqrt{R_{0i}^2 + \frac{R_{0i}^2}{c^2}}] \end{aligned} \quad (28)$$

式中各参数意义同前, 但均针对目标在空中 $T_i(x_i, y_i)$ 处的位置而言, 比如 R_i 即为目标位于 $T_i(x_i, y_i)$ 处时与主站的距离.

若试验得出目标在空中 N 个点的定位误差, 则可用统计方法求出测量因子 M 的平均值, 即

$$M = \sqrt{R_4^2 + \frac{R_s^2}{c^2}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\frac{4r_{\text{exp}}^i}{3} - 1 + \sqrt{1 - \left(\frac{z_i}{R_i}\right)^2} \right] \frac{R_i}{c}$$

$$\# \frac{\sin(\hat{B}_{02} - \hat{B}_{01}) + \sin(\hat{B}_{01} - \hat{B}_{03}) + \sin(\hat{B}_{03} - \hat{B}_{02})}{\sqrt{6 - 2\cos(\hat{B}_{02} - \hat{B}_{01}) - 2\cos(\hat{B}_{01} - \hat{B}_{03}) - 2\cos(\hat{B}_{03} - \hat{B}_{02})}} \quad (29)$$

如果站址误差的标准差 R_s 已知, 则容易求出系统测时误差的标准差 R_t .

求出测量因子 M 后, 即可根据实际布站和式(28)推算空间任一给定位置上的圆概率误差, 或用类似图 2 的方法绘出一定范围内的相对定位误差分布情况, 供分析决策使用.

4 结束语

现今采用的无源定位技术主要使用测向交叉定位技术, 即使用了侦察装备的测向功能, 而很少使用时差定位技术, 这是因为时差定位工作条件不容易满足. 主要存在以下两个技术难题, 第一, 时差定位利用测量站测量信号到达时间的功能, 但各站之间没有统一的时钟基准, 使得测时在定位中失去应有意义, 这就是高精度时间同步问题; 第二, 对雷达辐射源, 各测量站难以同时截获信号. 随着技术的发展, 这些难题逐渐得到解决. 本文的理论分析和仿真进一步证明了多站时差定位技术的可行性.

参考文献:

[1] 陈永光, 孙仲康. 基于距离差和方位角信息的运动辐射源跟踪

算法[J]. 电子学报, 1995, 23(1): 99- 102.

- [2] 王满玉. 机载雷达组网中被动探测与定位技术研究[D]. 西安: 西北工业大学研究生院, 2000.
- [3] 张正明. 辐射源无源定位研究[D]. 西安: 西安电子科技大学研究生院, 2000.
- [4] 孙仲康, 等. 单多基地有源无源定位技术[M]. 北京: 国防工业出版社, 1996: 20- 22.

作者简介:



陈永光 男, 1962 年 2 月出生于安徽合肥, 总工程师, 研究员, 博士生导师, 1995 年 11 月毕业于国防科技大学通信与电子系统专业, 获工学博士学位, 1997 年 11 月从该校计算机科学与技术博士后科研流动站期满出站, 2000 年 8 月至 2002 年 2 月在美国作高级访问学者. 共出版专著(译)两部, 发表论文逾百篇, 获军事科学优秀成果一等奖 1 项, 部委级科技进步二等奖 3 项、三等奖 2 项, 现从事电子装备试验技术研究.

李昌锦 男, 1977 年 12 月出生于安徽合肥, 2002 年毕业于电子工程学院军事运筹学专业, 获军事学硕士学位, 现为该院军事运筹学专业博士生, 专攻组网雷达对抗技术研究.